AF-3013

B.A./B.Sc. (Part - I)
Term End Examination, 2017-18

MATHEMATICS

Paper - III

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : **सभी** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer **all** questions. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, तो दर्शाइए कि

$$\operatorname{grad} \log |\vec{r}| = \vec{r} / |\vec{r}|^2$$

If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, then show that

$$\operatorname{grad} \log |\vec{r}| = \vec{r} / |\vec{r}|^2$$

(*b*) सिद्ध कीजिए कि सदिश $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ एवं $\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$ तथा $\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ समतलीय है।

Prove that vectors $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$, $\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$ and $\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ are coplanar.

अथवा / OR

(*a*) सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{div}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\text{curl}\,\vec{A}-\vec{A}\cdot\text{curl}\,\vec{B}$$

Prove that :

$$\text{div}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\text{curl}\,\vec{A}-\vec{A}\cdot\text{curl}\,\vec{B}$$

(*b*) सिद्ध कीजिए कि :

$$\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)+\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=0$$

Prove that :

$$\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)+\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=0$$

इकाई / Unit-II

2. (*a*) स्टोक्स प्रमेय के द्वारा $\int_C \left(e^x dx + 2y dy - dz\right)$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ वक्र C, $x^2 + y^2 = 4,\ z = 2$ है।

Evaluate by Stokes theorem $\int_C \left(e^x dx + 2y dy - dz\right)$, where C is the curve $x^2 + y^2 = 4,\ z = 2$.

(*b*) यदि S कोई वक्रपृष्ठ है जो कि आयतन V को घेरता है और $\vec{F} = x\hat{i} + 2y\hat{j} + 3z\hat{k}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds = 6V$

If S is any closed surface enclosing a volume V and $\vec{F} = x\hat{i} + 2y\hat{j} + 3z\hat{k}$, then show that $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds = 6V$

अथवा / OR

(*a*) सिद्ध कीजिए

$\iint_S \left(x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy\right) = 4\pi a^3$, जहाँ पृष्ठ S गोला $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ है।

Prove that

$\iint_S \left(x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy\right) = 4\pi a^3$, where S is the surface of sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(*b*) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\hat{i} - 2xy\hat{j}$ और C, xy तल में $y = 0,\ x = a,\ y = b,\ x = 0$ से परिबद्ध आयत है।

Evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ where $\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\hat{i} - 2xy\hat{j}$ and C is the ractangle in xy plane bounded by $y = 0$, $x = a,\ y = b,\ x = 0$.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ को स्थापित कीजिए।

Establish the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि संनाभि शांकव समकोण पर प्रतिच्छेद करती है।

Prove that confocal conics cuts at right angles.,

अथवा / OR

(*a*) शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ के सापेक्ष किसी बिन्दु (r, θ) के ध्रुवीय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the polar of the point (r, θ) with respect to the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$.

(*b*) शांकव $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 44 = 0$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the conics $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 44 = 0$.

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) सिद्ध कीजिए कि समीकरण $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ एक शंकु निरूपित करता है। यदि

$$u^2/a + v^2/b + w^2/c = d$$

Prove that the equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ represents a cone if

$$u^2/a + v^2/b + w^2/c = d$$

(*b*) त्रिज्याओं r_1 और r_2 में दो गोले लांबिक प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि उभयनिष्ठ वृत्त की त्रिज्या $\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$ है।

Two spheres of radii r_1 and r_2 cut orthogonally. Prove that the radius of the common circle is $\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$.

अथवा / OR

(*a*) लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अक्ष $x = 2y = -z$ है तथा त्रिज्या 4 है।

Find the equation of the right circular cylinder whose axis is $x = 2y = -z$ and radius is 4.

(*b*) दर्शाइए कि रेखा $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$ को अंतर्विष्ट करने वाले और रेखा $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1$, $y = 0$ के समांतर समतल का समीकरण $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 1 = 0$ है।

Show that the equation to the plane containing the line $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$ and parallel to the line $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=1$, $y=0$ is $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+1=0$.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) अति परवलयज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ के बिंदु $(a \cos \alpha,\ b \sin \alpha,\ 0)$ से जाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equations to the generators of the hyperboloid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ which pass through the point $(a \cos \alpha,\ b \sin \alpha,\ 0)$.

(*b*) शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के बिंदु (α, β, γ) पर स्पर्श समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of tangent plane of conicoids $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ at point (α, β, γ).

अथवा / OR

(*a*) दर्शाइए कि पृष्ठ $yz + zx + xy = a^2$ का समतल $lx + my + nz = p$ द्वारा प्रतिच्छेद एक परवलय होगा यदि $\sqrt{l} + \sqrt{m} + \sqrt{n} = 0$

Show that the section of the surface $yz + zx + xy = a^2$ by the plane $lx + my + nz = p$ will be paraboloid if $\sqrt{l} + \sqrt{m} + \sqrt{n} = 0$

(*b*) परवलयज $x^2 + 2y^2 = 2z$ के बिंदु (2, 0, 2) पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of normal of paraboloid $x^2 + 2y^2 = 2z$ at a point (2, 0, 2).