AF-3075

B.A./B.Sc. (Part - III)
Term End Examination, 2017-18

MATHEMATICS

Paper - I

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : **सभी** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer **all** questions. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) दर्शाइए कि द्विक श्रेणी $\sum_{m,n} \sin \frac{1}{2^m 3^n}$ अभिसारी है।

Show that the double series $\sum_{m,n} \sin \frac{1}{2^m 3^n}$ is convergent.

(*b*) यंग प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Young's theorem.

अथवा / OR

(*a*) फलन $f(x)$ के लिए अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \;, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Find the Fourier series of the function $f(x)$ in the interval $(-\pi, \pi)$, where :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \;, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

(*b*) फलन $f(x)$ को एक फोरियर ज्या श्रेणी के रूप में निरूपित कीजिए, जहाँ :

$$f(x) = x,\ 0 \le x < \ell$$

Represent the following function $f(x)$ as a Fourier sine series, where :

$$f(x) = x,\ 0 \le x < \ell.$$

इकाई / Unit-II

2. (*a*) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक एकदिष्ट फलन रीमान समाकलनीय होता है।

Prove that every monotonic function is Riemann integrable.

(*b*) समाकलन गणित का मूलभूत प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिए।

State and prove fundamental theorem of integral calculus.

अथवा / OR

(*a*) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ का अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

(*b*) दर्शाइए कि :

$$\int_0^1 \frac{x^n - 1}{\log x} dx = \log(1+\alpha)\,(\alpha > -1)$$

Show that :

$$\int_0^1 \frac{x^n - 1}{\log x} dx = \log(1+\alpha)\,(\alpha > -1)$$

इकाई / Unit-III

3. (*a*) सिद्ध कीजिए कि दो सम्मिश्र संख्याओं के अन्तर का मापांक उनके मापांकों के अन्तर से बड़ा या बराबर होता है।

Prove that the modulus of the difference of two complex numbers is greater than or equal to the difference of their moduli.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि फलन

$$u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$$

लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करता है और संगत विश्लेषिक फलन $u + iv$ को ज्ञात कीजिए।

Prove that the function

$$u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$$

satisfies Laplace's equation and determine corresponding analytic function $u + iv$.

अथवा / OR

(*a*) दर्शाइए कि प्रत्येक मॉबियस रूपान्तरण जो केवल एक स्थिर बिंदु α रखता है, निम्नलिखित रूप में रखा जा सकता है :

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z-\alpha} + \lambda$$

Show that every Mobius transformation which has only fixed point α can be put in the form :

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z-\alpha} + \lambda$$

(*b*) दर्शाइए कि रूपान्तरण $w = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{z}\right)$, इकाई वृत $|w| = 1$ के आन्तरिक भाग को परवलय के आन्तरिक भाग में रूपान्तरित करता है।

Show that the transformation $w = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{z}\right)$, transforms the interior of the unit circle $|w| = 1$ into interior of a parabola.

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) दर्शाइए कि किसी दूरीक समष्टि में संवृत समुच्चयों के एक स्वेच्छ संग्रह का सर्वनिष्ठ संवृत होता है।

Show that in a metric space, the intersection of an arbitrary collection of closed set is closed.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि दूरीक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

Prove that every convergent sequence in a metric space in bounded.

अथवा / OR

(*a*) संकुचन प्रतिचित्रण सिद्धान्त (बानाख स्थिर बिंदु प्रमेय) लिखिए और सिद्ध कीजिए।

State and prove Contraction Mapping Principle (Banach Fixed Point Theorem).

(*b*) सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

Prove that $\sqrt{5}$ is not a rational number.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) दर्शाइए कि समष्टि $C[a, b]$ गणनीय सघन है।

Show that the space $C[a, b]$ is countable compact.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक दूरीक समष्टि प्रथम गणनीय होता है।

Prove that every metric space is first countable.

अथवा / OR

(*a*) विस्तार प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिए।

State and prove Extension Theorem.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संहत दूरीक समष्टि बोल्जानों-वॉइएट्रास गुणधर्म (BWP) रखता है।

Prove that every compact metric space has the Bolzano-Weierstrass Property (BWP).

———