MT-07

June - Examination 2016

B.A. / B.Sc. Pt. III Examination

Algebra

Paper - MT-07

Time : 3 Hours] **[Max. Marks :- 067**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश : प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ', 'ब' और 'स' में विभाजित है। इस प्रश्नपत्र में नॉन–प्रोग्रामेबल साइंटीफिक केल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति हैं।

Section - A **$7 \times 1 = 7$**

(Very Short Answer Questions)

Note: Section 'A' contain seven (07) Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt **all** questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit may be thirty words.

खण्ड – 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'अ' में 07 अति लघु उत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना हैं। प्रत्येक प्रश्न 01 अंक का है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द हैं।

1) (i) Define group
समूह को परिभाषित कीजिये।

(ii) Define sub-group.
उपसमूह को परिभाषित कीजिये।

(iii) Define inverse Permutation
प्रतिलोभ क्रमचय को परिभाषित कीजिये।

(iv) Define Ring.
वलय को परिभाषित कीजिये।

(v) Define ideal.
गुणजावली को परिभाषित कीजिये।

(vi) Define Linear Combination of vectors.
सदिशों के एकघात संचय को परिभाषित कीजिये।

(vii) Define Basis of a vector space.
सदिश समष्टि के आधार को परिभाषित कीजिये।

Section - B $4 \times 8 = 32$

(Short Answer Questions)

Note: Section 'B' contain Eight (08) Short Answer Type Questions. Examinees have to answer **any four** (04) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

(खण्ड – ब)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'ब' में 08 लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्ही भी चार (04) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का

है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

2) Show that the set Q^+ of the positive rational numbers forms an abelian group for the operation and defined as :
सिद्ध कीजिये कि धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q^+ संक्रिया $*$ के लिये एक क्रमविनिमेय ग्रुप है जहाँ $*$ निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$a * b = \frac{ab}{2} \quad \forall\, a, b \in Q^+$$

3) If (यदि)

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\sigma = (134)\ (56)\ (2789)$

then find $\sigma^{-1} \rho\, \sigma$ and by expressing the permutation ρ as the product of disjoint cycles, find whether ρ is an even permutation or odd permutation. Also find its order.
$\sigma^{-1} \rho\, \sigma$ ज्ञात कीजिये तथा क्रमचय ρ को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल में व्यक्त करके बताइये कि ρ सम क्रमचय है या विषम क्रमचय? इसकी कोटि भी ज्ञात कीजिये।

4) Prove that the order of every subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group.
सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित ग्रुप के प्रत्येक उपग्रुप की कोटि ग्रुप की कोटि का भाजक होती है।

5) If f is a homomorphism from a group G to G^1 with kernel k, then Prove that $K \triangle G$.

यदि f ग्रुप G से G^1 पर एक समाकारिता हो तो सिद्ध कीजिये कि f की अष्टि $K \triangle G$.

6) If I_1 and I_2 be two ideals of a ring R, then prove that $I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 / a_1 \in I, a_2 \in I_2\}$ is an ideal of R containing both I_1 and I_2.

यदि I_1 और I_2 किसी वलय R की दो गुणजावलियाँ हो तो सिद्ध कीजिए कि $I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 / a_1 \in I, a_2 \in I_2\}$ भी R की एक गुणजावली होगी जिसमें I_1 और I_2 दोनों अर्न्तविष्ट है।

7) Prove that the set $W = \{(a, b, o) / a, b \in F\}$ is a subspace of the vector space $V_3(F)$ for vector addition and multiplication.
सिद्ध कीजिये की समुच्चय $W = \{(a, b, o) / a, b \in F\}$ सदिश योग व गुणन के लिए सदिश समष्टि $V_3(F)$ की एक उपसमष्टि है।

8) If W_1 and W_2 are subspace of a vector space V(F), then :
यदि W_1 और W_2 किसी सदिश समष्टि V(F) की दो उप समष्टियाँ हो तो :
$W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2) = \{W_1 \cup W_2\}$

9) Prove that every non-empty subset of a LI set of vectors is also LI.
सिद्ध कीजिए सदिशों के LI समुच्चय का प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय भी LI होता है।

Section - C $\quad 2 \times 14 = 28$

(Long Answer Questions)

Note: Section 'C' contain 04 Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer **any two** (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words.

(खण्ड – स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'स' में 04 निबंधात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्ही भी दो (02) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का हैं। परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

10) Prove that - The set of all ordered pairs of real numbers is a commutative ring with unity under addition (+) and multiplication (×) of ordered pairs defined as below :

सिद्ध कीजिये कि वास्तविक संख्याओं के सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय निम्न प्रकार परिभाषित योग (+) एवं (×) के लिए एक क्रम विनिमेय तत्समकी वलय है :

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\times(c,d)=(ac,bd)$$
$$\forall a,b,c,d \in R$$

Is it an integral domain?

क्या यह पूर्णांकीय प्रांत है?

11) (i) Find all the cosets of 3Z in the group (Z, +).

ग्रुप (Z, +) में 3Z के सभी सहसमुच्चयों को ज्ञात कीजिये।

(ii) Prove that - The set An of all even permutation of degree n is a group of order $\frac{1}{2}n!$ for the product of permutations.

सिद्ध कीजिए – n अंशांक के सभी सम क्रमचर्यों का समुच्चय An क्रमचय गुणन संक्रिया के लिए $\frac{1}{2}n!$ कोटि का ग्रुप होता है।

12) Prove that - The set F^n of all ordered n-tuples of a field F is a vector space over the field F.
सिद्ध कीजिए की किसी क्षेत्र F के अवयवों के n क्रमित तुपलों का समुच्चय F^n क्षेत्र F पर एक सदिश समष्टि है।

13) (i) Prove that - Every LI subset of a finite dimensional vector space V(F) is either a basis of V or can be extended to form a basis of V.
सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) का प्रत्येक LI उपसमुच्चय या तो V का आधार होता है या उसे V का आधार निर्मित करने के लिए विस्तृत किया जा सकता है।

(ii) Prove that - The union of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space V(F) is a subspace iff either $W_1 \subset W_2$ or $W_2 \subset W_1$
सिद्ध कीजिए – किसी सदिश समष्टि V(F) की दो उप समष्टियों W_1 तथा W_2 का संघ एक उपसमष्टि होता है यदि $W_1 \subset W_2$ या $W_2 \subset W_1$