MT-07

December - Examination 2016

B.A. / B.Sc. Pt. III Examination

Algebra

Paper - MT-07

Time : 3 Hours] **[Max. Marks :- 67**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश : प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ', 'ब'और 'स' में विभाजित है। इस प्रश्नपत्र में नॉन–प्रोग्रामेबल साइंटीफिक केल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section - A **7 × 1 = 7**

(Very Short Answer Questions)

Note: Section 'A' contain seven (07) Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt **all** questions. Each question is of 01 mark and maximum word limit may be thirty words.

खण्ड – 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'अ' में 07 अति लघु उत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न 01 अंक का है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द है।

1) (i) Define order of group.
ग्रुप की कोटि को परिभाषित कीजिए।

(ii) Define Coset.
सहसमुच्चय को परिभाषित कीजिए।

(iii) Define quotient group.
विभाग ग्रुप को परिभाषित कीजिए।

(iv) Define order of a permutation.
क्रमचय की कोटि परिभाषित कीजिए।

(v) Define field.
क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define vector subspace.
सदिश उपसमीष्ट को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define linear dependent of vectors.
सदिशों की रैखिक आश्रितता को परिभाषित कीजिए।

Section - B **$4 \times 8 = 32$**

(Short Answer Questions)

Note: Section 'B' contain Eight (08) Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer **any four** (04) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

(खण्ड – ब)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'ब' में 08 लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देना है। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

2) Show that the set $\{1, -1, i, -i\}$ where $i = \sqrt{(-1)}$ is an abelian group for multiplication.
सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, -1, i, -i\}$ जहाँ $i = \sqrt{(-1)}$ गुणा संक्रिया के लिए एक आबेली ग्रुप है।

3) The union of two subgroups is a subgroup if one is contained in the other.
सिद्ध कीजिए कि दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होता है यदि एक उपग्रुप दूसरे में अन्तर्विष्ट हो।

4) Find the quotient group $\frac{G}{H}$ and also prepare its operation table when $G = (z, +)$, $H = (4z, +)$
विभाग ग्रुप $\frac{G}{H}$ ज्ञात कीजिए एवं इसकी संक्रिया सारणी भी बनाइये जब कि, $G = (z, +)$, $H = (4z, +)$

5) A ring R is without zero divisors iff the cancellation law holds in R.

कोई वलय R शून्य भाजक रहित है यदि दि ($\Leftrightarrow$) में निरसन नियम सत्य है।

6) The ring $(z, +, \times)$ of integers is a principal ideal ring.
पूर्णांकों की रिंग $(z, +, \times)$ एक मुख्य गुणजावली रिंग है।

7) The necessary and sufficient conditions for a non void subset W of a vector space V(F) to be a subspace W of a vector space V(F) to be a subspace of V(F) is that W is closed under vector addition and scalar multiplication.

i.e. $\alpha \in W, B \in W \Rightarrow \alpha + \beta \in W$

$\alpha \in F, \alpha \in W \Rightarrow \alpha \in W$

किसी सदिश समष्टि V(F) के एक अरिक्त उपसमुच्चय W के लिये V(F) का एक उपसमष्टि होने के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि W सदिश योग एवं अदिश गुणन के लिए संवृत्त है।

i.e. $\alpha \in W, B \in W \Rightarrow \alpha + \beta \in W$

$\alpha \in F, \alpha \in W \Rightarrow \alpha \in W$

8) Show that S = {(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)} is a basis for the space $V_3(R)$. Also find the co ordinates of $\alpha = (3, 1, -4) \in V_3(R)$ relative to this basis.

सिद्ध कीजिये कि S = {(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)} समष्टि $V_3(R)$ का एक आधार है। इस आधार के सापेक्ष $\alpha = (3, 1, -4) \in V_3(R)$ के निर्दे शांक भी ज्ञात कीजिए।

9) Is the vector $\alpha = (2, -5, 3) \in V_3$ (R), a LC of the following vectors?

$\alpha_1 = (1, -3, 2), \ \alpha_2 = (2, -4, -1), \ \alpha_3 = (1, -5, 7)$

क्या $\alpha = (2, -5, 3) \in V_3$ (R) सदिश निम्न सदिशों का LC है?

$\alpha_1 = (1, -3, 2), \ \alpha_2 = (2, -4, -1), \ \alpha_3 = (1, -5, 7)$

Section - C $\qquad 2 \times 14 = 28$

(Long Answer Questions)

Note: Section 'C' contain 04 Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer **any two** (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words.

(खण्ड – स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'स' में 04 निबंधात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी दो (02) सवालों के जवाब देना है। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

10) (i) If a, b are elements of a group G, then the equations $ax = b$ and $ya = b$ have unique solution in G.

यदि a और b किसी समूह G के अवयव हों तो समीकरण $ax = b$ तथा $ya = b$ के G में अद्वितीय हल होते हैं।

(ii) Prove that H is a sub group of the group (Co, X) where:

$H = \{a + b\sqrt{2} \,/\, a \in Q, b \in Q, a^2 + b^2 \neq 0\}$ and $Co = \{c - 20\}$

सिद्ध कीजिये कि H समूह (Co, X) का एक उपग्रुप है जहाँ

$H = \{a + b\sqrt{2} \,/\, a \in Q, b \in Q, a^2 + b^2 \neq 0\}$ एवं $Co = \{c - 20\}$

11) (i) If H is sub group of group G and $K = \{x \in G \,/\, xH = Hx\}$ then prove that K is sub group of G.

यदि H, समूह G का उपसमूह है तथा $K = \{x \in G \,/\, xH = Hx\}$ तो सिद्ध कीजिए कि K, G का उपसमूह है।

(ii) Prove that ring ($zp = \{0, 1, 2, ...(p-1)\}, +_p, \times_p$) is an integral domain if p is prime.

सिद्ध कीजिए कि वलय ($zp = \{0, 1, 2, ...(p-1)\}, +_p, \times_p$) एक पूर्णांकीय प्रान्त होता है यदि p अभाज्य है।

12) Prove that the set M of all $m \times n$ real matrices (having their elements as real numbers) is a vector space over the field R of real numbers with respect to addition of matrices and scalar multiplication of matrices.

सिद्ध कीजिए सम्पूर्ण $m \times n$ वास्तविक मैट्रिसेज (जिनके अवयव वास्तविक संख्याएँ हों) का समुच्चय M वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र पर मैटिक्स योग एवं मैट्रिक्स अदिश गुणन के सापेक्ष एक सदिश समष्टि है।

13) (i) Show that the set S = {(1, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1); (0, 1, 0)}. spans the vector space $V_3(R)$ but is not a basis set.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय S = {(1, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1); (0, 1, 0)}. सदिश समष्टि $V_3(R)$ की विस्तृति करता है परन्तु एक आधार समुच्चय नहीं है।

(ii) The linear sum of two subspaces of a vector space is also a subspace.

किसी सदिश समष्टि की दो उपसमष्टियों का एक घातीय योग भी एक उपसमष्टि होती है।

———